

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В СЛОЕ<sup>1</sup>

*Аннотация.* В статье рассматриваются функции Грина 1-го и 2-го рода для уравнения Гельмгольца в слое. Доказывается возможность аналитического продолжения через положительную часть действительной оси в нижнюю полуплоскость на основе принципа симметрии Римана-Шварца. Доказана справедливость известного представления функции Грина в верхней полуплоскости для нижней полуплоскости.

*Ключевые слова:* уравнение Гельмгольца для слоя, аналитическое продолжение функции Грина.

*Abstract.* In the article Green's functions first and second kind for the Helmholtz equation in a layer are considered. The opportunity of analytical continuation across positive part of real axis is based upon Riemann-Schwartz principle of symmetry was proved. Correctness of known Green's functions representations in upper half-plane was proved for lower half-plane.

*Keywords:* Helmholtz equation in a layer, analytical continuation of Green's function.

### Введение

В ряде задач математической физики важно иметь аналитическое продолжение функций Грина для уравнения Гельмгольца в слое в нижнюю полуплоскость [1]. Обширные исследования по аналитическому продолжению функций Грина для задач математической физики представлены в работе [2]. В статье [3] получены представления для функций Грина в первом квадранте комплексной плоскости и исследованы их свойства. Однако результаты о поведении функций Грина в нижней полуплоскости в этой статье отсутствуют. Целью настоящей работы является доказательство возможности аналитического продолжения функций Грина в нижнюю полуплоскость и получения явной формулы для этого продолжения.

### 1 Функции Грина 1-го и 2-го рода для уравнения Гельмгольца в слое

Мы будем рассматривать функции Грина 1-го рода  $G_1(x, y)$  и 2-го рода  $G_2(x, y)$  для уравнения Гельмгольца с параметром  $k^2$  в неограниченной области в  $R^3$  слоя  $U^- = \{x = (x_1, x_2, x_3) : -1 < x_3 < 0\}$  (для слоя  $U^+ = \{x = (x_1, x_2, x_3) : 0 < x_3 < 1\}$  рассматривается аналогично). Относительно волнового числа  $k$  считаем, что  $\text{Im} k \geq 0$  и  $k \neq 0$ .

Функция Грина  $G_1 = G_1(x, y)$ ,  $x, y \in U^-$  определяется как решение краевой задачи ( $y \in U^-$  фиксировано):

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке гранта Минобрнауки РФ по ФЦП «Развитие потенциала высшей школы» № 2.1.1/1647.

$$\Delta G_1 + k^2 G_1 = -\delta(x - y), x \in U^-; \quad (1)$$

$$G_1|_{x_3=0} = G_1|_{x_3=-1} = 0, \quad (2)$$

с условиями на бесконечности [3]: для  $g_{1,n}, n \geq 0$ ,

$$\frac{\partial g_{1,n}}{\partial \rho} - ik_n g_{1,n} = o(\rho^{-1/2}), g_{1,n} = O(\rho^{-1/2}), \quad (3)$$

т.к.  $\rho := (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \rightarrow \infty$  равномерно по всем направлениям  $x'/\rho$ ,  $x' := (x_1, x_2)$  и равномерно по  $y$  из любого ограниченного подмножества  $\overline{U^-}$ , где

$$k_n^2 = k^2 - \pi^2 n^2, \operatorname{Im} k_n \geq 0; \quad (4)$$

$k_n > 0$ , если  $k > \pi n$ ;  $k_n < 0$ , если  $k < -\pi n$ , и

$$g_{1,n} := 2 \int_{-1}^0 G_1(x, y) \cos \pi n x_3 dx_3. \quad (5)$$

Соотношения (3) и (4) являются условиями Зоммерфельда для двумерной ограниченной области. Коэффициенты Фурье (5) являются решениями двумерного уравнения Гельмгольца с параметром  $k_n^2$  в области  $\rho > \rho_0$  для некоторого  $\rho_0$ . Отсюда и из условия (3) следует [4], что  $g_{1,n}$  и  $\frac{\partial g_{1,n}}{\partial \rho}$  экспоненциально убывают при  $\rho \rightarrow \infty$ , если  $k^2 < \pi^2 n^2, (\operatorname{Im} k_n > 0)$ .

Функция Грина  $G_1(x, y)$  1-го рода может быть представлена в одной из следующих форм [3]:

$$G_1(x, y) = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \sin \pi j x_3 \sin \pi j y_3 H_0^{(1)}(k_j |x' - y'|), \quad (6)$$

для  $x' \neq y'$ , где  $x' := (x_1, x_2)$  и  $y' := (y_1, y_2)$  или

$$G_1(x, y) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\exp(ik|x - y - 2je_3|)}{|x - y - 2je_3|} - \frac{\exp(ik|x - y^* + 2je_3|)}{|x - y^* + 2je_3|} \right), \quad (7)$$

где  $e_3 = (0, 0, 1)$ ,  $y^* = (y_1, y_2, -y_3)$ ,  $H_0^{(1)}(z)$  – функция Ханкеля нулевого порядка первого рода. Формулы (6) и (7) имеют смысл при  $\operatorname{Im} k \geq 0$  и  $k \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$ . Отметим, что функция Грина 1-го рода определена при  $k = 0$ . Эквивалентность представлений (6) и (7) доказана в [4].

Функция Грина  $G_2 = G_2(x, y)$ ,  $x, y \in U^-$  определяется как решение краевой задачи ( $y \in U^-$  фиксировано):

$$\Delta G_2 + k^2 G_2 = -\delta(x - y), x \in U^-; \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial G_2}{\partial x_3} \right|_{x_3=0} = \left. \frac{\partial G_2}{\partial x_3} \right|_{x_3=-1} = 0, \quad (9)$$

с условиями на бесконечности [3]: для  $g_{2,n}$ ,  $n \geq 1$ ,

$$\frac{\partial g_{2,n}}{\partial \rho} - ik_n g_{2,n} = o(\rho^{-1/2}), g_{2,n} = O(\rho^{-1/2}), \quad (10)$$

т.к.  $\rho := (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \rightarrow \infty$  равномерно по всем направлениям  $x'/\rho$ ,  $x' := (x_1, x_2)$

и равномерно по  $y$  из любого ограниченного подмножества в  $\overline{U^-}$ , где

$$k_n^2 = k^2 - \pi^2 n^2, \operatorname{Im} k_n \geq 0; \quad (11)$$

$k_n > 0$ , если  $k > \pi n$ ;  $k_n < 0$ , если  $k < -\pi n$ , и

$$g_{2,n} := 2 \int_{-1}^0 G_2(x, y) \sin \pi n x_3 dx_3. \quad (12)$$

Соотношения (10) и (11) являются условиями Зоммерфельда для двумерной ограниченной области. Коэффициенты Фурье (12) являются решениями двумерного уравнения Гельмгольца с параметром  $k_n^2$  в области  $\rho > \rho_0$  для некоторого  $\rho_0$ . Отсюда и из условия (10) следует [4], что  $g_{2,n}$  и  $\frac{\partial g_{2,n}}{\partial \rho}$  экспоненциально убывают при  $\rho \rightarrow \infty$ , если  $k^2 < \pi^2 n^2$  ( $\operatorname{Im} k_n > 0$ ).

Для функции Грина  $G_2(x, y)$  2-го рода верны следующие представления [3]:

$$G_2(x, y) = \frac{i}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \delta_{0j}} \cos \pi j x_3 \cos \pi j y_3 H_0^{(1)}(k_j |x' - y'|), \quad (13)$$

для  $x' \neq y'$ , где  $x' := (x_1, x_2)$  и  $y' := (y_1, y_2)$  или

$$G_2(x, y) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left( \frac{e^{ik|x-y-2je_3|}}{|x-y-2je_3|} + \frac{e^{ik|x-y^*+2je_3|}}{|x-y^*+2je_3|} \right), \quad (14)$$

где  $e_3 = (0, 0, 1)$ . Здесь  $H_0^{(1)}(z)$  – функция Ханкеля нулевого порядка первого рода и  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера. Представления (13) и (14) эквивалентны [3].

Формулы (13) и (14) имеют смысл при  $\operatorname{Im} k \geq 0$  и  $k \neq \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Отметим, что функция Грина 2-го рода не определена при  $k = 0$ .

## 2 Сходимость представлений для функций Грина и аналитическое продолжение в нижнюю полуплоскость

Будем рассматривать функцию Грина 2-го рода  $G_2(x, y)$  и использовать для нее представление (13). Для функции Грина 1-го рода доказательство ничем не отличается.

Пусть  $k = a + bi$ , будем считать, что  $\operatorname{Re} k = a > 0$  и  $\operatorname{Im} k = b > 0$ . Тогда  $0 < \varphi < \pi/2$ , где  $\varphi = \arg k$ . Для  $k_n^2$  получаем

$$k_n^2 = (a + bi)^2 - \pi^2 n^2 = (a^2 - b^2 - \pi^2 n^2) + 2abi.$$

Тогда для любых  $a > 0, b > 0$  найдется  $n := n'$  такое, что  $a^2 - b^2 - \pi^2 n'^2 < 0$  и  $k_n = \pm \sqrt{u_n} + v_n i$ , где

$$u_n = a^2 - b^2 - \pi^2 n'^2 < 0, \quad v_n = 2ab > 0 \quad \text{и} \quad w_n = u_n + v_n i. \quad (15)$$

Следовательно,  $\pi/2 < \arg w_n < \pi$  и

$$k_n = \pm \sqrt{u_n^2 + v_n^2} \left( \cos \frac{\arg w_n}{2} + i \sin \frac{\arg w_n}{2} \right).$$

Пусть  $\frac{\arg w_n}{2} = \psi$ , тогда ясно, что  $0 < \psi < \pi/2$ ,

$$k_n = \pm \sqrt{u_n^2 + v_n^2} (\cos \psi + i \sin \psi).$$

Обозначим  $\xi_n = \sqrt{u_n^2 + v_n^2} \cos \psi > 0$  и  $\eta_n = \sqrt{u_n^2 + v_n^2} \sin \psi > 0$ , тогда  $k_n = \pm (\xi_n + i\eta_n)$ , используя условие  $\operatorname{Im} k_n \geq 0$ , выбираем перед корнем знак «+» и получаем

$$k_n = \xi_n + i\eta_n, \quad \text{где} \quad \xi_n > 0 \quad \text{и} \quad \eta_n > 0.$$

Из формул (15) для  $u_n$  и  $v_n$  ясно, что при  $n \rightarrow \infty$ :  $u_n \rightarrow -\infty$ , а  $v_n = 2ab > 0$ , и, следовательно,  $\psi = \frac{\arg w_n}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}$ . Это значит, что при  $n \rightarrow \infty$  имеем  $\eta_n \rightarrow \infty$ .

Вернемся к рассмотрению ряда (13), обозначим

$$a_n = \frac{i}{2} \frac{1}{1 + \delta_{0j}} \cos \pi j x_3 \cos \pi j y_3 H_0^{(1)}(k_j p),$$

где  $p = |x' - y'| > 0$ , тогда  $|a_n| \leq \left| H_0^{(1)}(k_n p) \right| = \left| H_0^{(1)}((\xi_n + i\eta_n) p) \right|.$

Известно представление [5, с. 29]

$$H_0^{(1)}(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz \operatorname{ch} t} dt, \quad 0 < \arg z < \pi;$$

тогда  $|\eta_n| \geq 2ab > 0$ , и

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq \left| H_0^{(1)}((\xi_n + i\eta_n)p) \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{ip(\xi_n + i\eta_n) \operatorname{ch} t} \right| dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{ip\xi_n \operatorname{ch} t} \right| \cdot \left| e^{-p\eta_n \operatorname{ch} t} \right| dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p\eta_n \operatorname{ch} t} dt < Ce^{-p\eta_n}, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $C = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{2ab(1-\operatorname{ch} t)p} dt < \infty$  – константа, не зависящая от  $n$ .

Из формулы (16) следует, что исходный ряд (13) сходится равномерно и определяет в любом ограниченном подмножестве точек первого квадранта ( $\operatorname{Re} k > 0, \operatorname{Im} k > 0$ ) аналитическую функцию.

Теперь вернемся к обозначению  $k_n^2 = k^2 - \pi^2 n^2$ . Рассмотрим вопрос о поведении ряда (13) при действительных значениях аргумента  $k$ .

При действительных значениях  $k$  найдется такое число  $n'$ , что  $k_n^2 = k^2 - \pi^2 n'^2 < 0$ , и, значит,  $k_n$  будет чисто мнимым. Так как мы имеем условие  $\operatorname{Im} k_n \geq 0$ , то  $k_n = iz_n$ , где  $z_n > 0$  при  $n > n'$ . Известно, что  $\frac{1}{\pi} K_0(z) = \frac{i}{2} H_0^{(1)}(iz)$ , где  $K_0(z)$  – функция Макдональда, и мы получаем

$$G_2(x, y) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \delta_{0n}} \cos \pi n x_3 \cos \pi n y_3 K_0(pz_n).$$

Для  $K_0(z)$  известно представление [5, с. 94]  $K_0(z) = \int_0^{\infty} e^{-z \operatorname{ch} t} dt$ ,  $\operatorname{Re} z > 0$ .

Обозначим  $a_n = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + \delta_{0n}} \cos \pi n x_3 \cos \pi n y_3 K_0(pz_n)$ , тогда из (15) при

$b = 0$  получим, что  $|u_n| \geq \left| a^2 - \pi^2 n'^2 \right|$ , следовательно,  $|z_n| = |k_n| \geq \sqrt{\left| a^2 - \pi^2 n'^2 \right|}$ ,

из этого имеем

$$|a_n| < \left| K_0(pz_n) \right| = \int_0^{\infty} e^{-pz_n \operatorname{ch} t} dt < Ce^{-pz_n}, \quad (17)$$

где  $C = \int_0^{\infty} e^{\sqrt{a^2 - \pi^2 n'^2} (1 - \operatorname{ch} t)^p} dt < \infty$  – константа, не зависящая от  $n$ .

Оценка (17) означает, что при действительных значениях  $k$  ряд (13) сходится равномерно по  $k$  на любом ограниченном подмножестве множества  $M = \{R_+ \setminus (|\pi n - k| < \varepsilon), n \geq 0\}$ . Кроме того, следует помнить, что при оценке сходимости мы отбросили конечное число членов ряда (13) до номера  $n' - 1$  включительно, которые, разумеется, не влияют на сходимость. Значения отброшенных членов, вообще говоря, незначительны. Ясно, что для каждого из отброшенных членов аналитическое продолжение существует и определяется теми же формулами.

Известно, что  $K_0(z)$  при  $z > 0$  принимает вещественные значения, и, значит, функция, определяемая рядом (13), может быть продолжена аналитически в четвертый квадрант ( $\operatorname{Re} k > 0, \operatorname{Im} k < 0$ ). Этот факт следует из принципа симметрии Римана-Шварца.

Если теперь мы докажем сходимость ряда (13) при  $k = a - bi$ , где  $a > 0$ ,  $b > 0$ , то тем самым мы найдем аналитическое продолжение функции Грина  $G_2(x, y)$  в части нижней полуплоскости (четвертом квадранте).

Пусть  $k = a - bi$  и  $a > 0$ ,  $b > 0$ , тогда  $k_n^2 = (a - bi)^2 - \pi^2 n'^2 = a^2 - b^2 - \pi^2 n'^2 - 2abi$ . Ясно, что для любых  $a > 0, b > 0$  найдется  $n := n'$  такое, что  $a^2 - b^2 - \pi^2 n'^2 < 0$ . Пусть  $a^2 - b^2 - \pi^2 n'^2 = -u_n$ , где  $u_n > 0$  и  $2ab = v_n > 0$ . Тогда  $k_n^2 = -u_n - v_n i$  и  $k_n = \pm i \sqrt{u_n + v_n i}$ . Пусть  $w_n = u_n + v_n i$ , тогда  $0 < \arg w_n < \pi/2$ . Получаем

$$k_n = \pm i \sqrt{u_n^2 + v_n^2} \left( \cos \frac{\arg w_n}{2} + i \sin \frac{\arg w_n}{2} \right) = \pm i (\xi_n + i \eta_n),$$

где  $\xi_n = \sqrt{u_n^2 + v_n^2} \cos \frac{\arg w_n}{2} > 0$ ,  $\eta_n = \sqrt{u_n^2 + v_n^2} \sin \frac{\arg w_n}{2} > 0$ .

Из условия  $\operatorname{Im} k_n \geq 0$  выбираем знак «+» и получаем

$$k_n = i (\xi_n + i \eta_n).$$

Теперь мы можем записать ряд (13) в такой форме:

$$G_2(x, y) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \delta_{0n}} \cos \pi n x_3 \cos \pi n y_3 K_0(p(\xi_n + i \eta_n)).$$

Теперь выясним поведение  $\xi_n$  при  $n \rightarrow \infty$ . Так как  $\xi_n = \sqrt{u_n^2 + v_n^2} \cos \frac{\arg w_n}{2}$  и  $\sqrt{u_n^2 + v_n^2} \rightarrow \infty$ ,  $\cos \frac{\arg w_n}{2} \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ , то из этого следует, что  $\xi_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$  и  $|\xi_n| \geq 2ab > 0$ .

Обозначим  $a_n = G_2(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + \delta_{0n}} \cos \pi n x_3 \cos \pi n y_3 K_0(p(\xi_n + i\eta_n))$ .

Получаем следующую оценку:

$$|a_n| \leq |K_0(p(\xi_n + i\eta_n))| = \left| \int_0^\infty e^{-p(\xi_n + i\eta_n) \operatorname{ch} t} dt \right| \leq \int_0^\infty |e^{-ip\eta_n \operatorname{ch} t}| \cdot |e^{-p\xi_n \operatorname{ch} t}| dt = \int_0^\infty |e^{-p\xi_n \operatorname{ch} t}| dt \leq C e^{-p\xi_n}, \quad (18)$$

где  $C = \int_0^\infty e^{2ab(1-\operatorname{ch} t)p} dt < \infty$  – константа, не зависящая от  $n$ .

Это значит, что формула (18) дает равномерную оценку, из этого следует, что ряд (13) сходится и при  $\operatorname{Re} k > 0$ ,  $\operatorname{Im} k < 0$  во всяком ограниченном подмножестве точек четвертого квадранта. В соответствии с принципом симметрии Римана-Шварца получаем аналитическое продолжение функции Грина  $G_2(x, y)$  из части верхней полуплоскости ( $\operatorname{Re} k > 0$ ,  $\operatorname{Im} k > 0$ ) в часть нижней полуплоскости ( $\operatorname{Re} k > 0$ ,  $\operatorname{Im} k < 0$ ).

Поскольку функции  $H_0^{(1)}(z - z_0)$ ,  $K_0(z - z_0)$  и  $\sqrt{z - z_0}$  имеют точки разветвления при  $z = z_0$ , то нам необходимо еще указать, как проводить разрезы из точек разветвления. Один из вариантов проведения разрезов представлен на рис. 1.

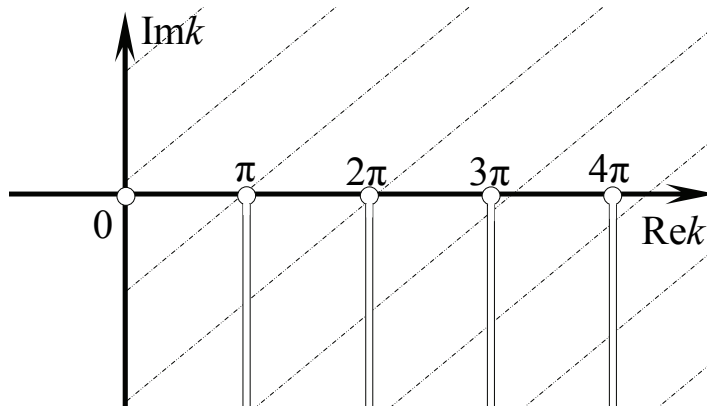


Рис. 1 Представление области  $M'$  на комплексной плоскости

После проведения разрезов для  $H_0^{(1)}(z - z_0)$  и  $K_0(z - z_0)$  выбирается главное значение логарифма  $\ln(z - z_0)$ , а для  $k_n = \sqrt{k^2 - \pi^2 n^2}$  выбираются в зависимости от  $k$  такие ветви, чтобы  $k_j > 0$  при  $k > \pi j$  или  $k_j < 0$  при  $k < \pi j$  [3].

Если рассматриваемая точка  $k$  попадает на разрез, то направление разреза можно немного изменить так, чтобы он не проходил через  $k$ .

Таким образом, мы не только доказали, что функцию Грина можно определить во всяком ограниченном подмножестве точек правой полуплоскости при  $\operatorname{Re} k > 0, k \neq \pi n$ , для  $n = 0, 1, 2, \dots$ , но и доказали справедливость представления (13) для функции Грина 2-го рода во всяком ограниченном подмножестве множества  $M' = \{(\operatorname{Re} k \geq 0) \setminus (|\pi n - k| < \varepsilon, n \geq 0)\}$  (с выбором соответствующих разрезов).

#### **Список литературы**

1. **Родионова, И. А.** О фредгольмовости электромагнитной задачи о собственных колебаниях в слоях, связанных через отверстие / И. А. Родионова, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. – 2004. – № 5. – С. 39–48. – (Естественные науки).
2. **Мизохата, С.** Теория уравнений с частными производными / С. Мизохата. – М. : Мир, 1977.
3. **Morgenrother, K.** On the Instability of Resonances in Parallelplane Waveguides / K. Morgenrother, P. Werner // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 1989. – V. 11. – P. 279–315.
4. **Ильинский, А. С.** Математические модели электродинамики / А. С. Ильинский, В. В. Кравцов, А. Г. Свешников. – М. : Высшая школа, 1991.
5. **Бэйтмен, Г.** Высшие трансцендентные функции : в 3 т. / Г. Бэйтмен, А. Эрдейи. – М. : Наука, 1974. – Т. 3.

---

#### **Смирнов Юрий Геннадьевич**

доктор физико-математических наук,  
профессор, заведующий кафедрой  
математики и суперкомпьютерного  
моделирования, Пензенский  
государственный университет

#### **Smirnov Yuri Gennadyevich**

Doctor of physico-mathematical sciences,  
professor, head of sub-department  
of mathematics and supercomputer  
modeling, Penza State University

---

#### **Валовик Дмитрий Викторович**

кандидат физико-математических наук,  
доцент, кафедра математики  
и суперкомпьютерного моделирования  
Пензенский государственный  
университет

#### **Valovik Dmitry Viktorovich**

Candidate of physico-mathematical  
sciences, associate professor,  
sub-department of mathematics  
and supercomputer modeling,  
Penza State University

---

УДК 517.6

**Валовик, Д. В.**

**Аналитическое продолжение функции Грина для уравнения Гельмгольца в слое** / Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 2 (10). – С. 83–90.